6/11/2018

$A^{n\times n} \to \det A = 0 \to$ Δεν έχει αντίστροφο
$\qquad\qquad\quad \neq 0 \to$ Το έχει αντίστροφο. Ποιος είναι: $A^{-1} = (b_{ij})$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

Ένα επίπεδο (ή ο χώρος) αποτελείται από τα σημεία του.
Ορίζουμε ένα σημείο σαν το βασικό σημείο (συνήθως με το O). Θεωρούμε τα διανύσματα με αρχή το O και τέλος οποιοδήποτε σημείο. Άρα έχουμε 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των αντίστοιχων διανυσμάτων με αρχή το O. Κάθε τέτοιο διάνυσμα είναι ο αντιπρόσωπος του αντίστοιχου "ελεύθερου" διανύσματος. Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των διανυσμάτων ορίζονται δύο πράξεις πρόσθεση (με τον κανόνα του ▱) και σημειακό γινόμενο (πολ/ζεις το διάνυσμα με αριθμό). Οι πράξεις αυτές ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες και με αυτές το προηγούμενο σύνολο γίνεται διανυσματικός - γραμμικός χώρος.

Scanned by CamScanner

Διανυσματικός χώρος.

Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\oplus\ V\times V \to V$ και $\odot\ \mathbb{R}(\mathbb{C})\times V \to V$ οι οποίες ικανοποιούν τις επόμενες ιδιότητες καλείται διανυσματικός χώρος.

1) $(V_1 \oplus V_2)\oplus V_3 = V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$
2) $\exists$ ένα στοιχείο $e\in V$: $V\oplus e = V = e\oplus V$ δηλαδή το e είναι το μηδενικό διάνυσμα
3) $\forall v\in V\ \exists\ v'\in V: v\oplus v' = e = v'\oplus v$
4) $\forall v_1, v_2\in V$ ισχύει $v_1\oplus v_2 = v_2\oplus v_1$
5) $c\odot(v_1\oplus v_2) = c\odot v_1 \oplus c\odot v_2$
6) $(c+c')\odot v = c\odot v + c'\odot v$
7) $c\odot(c'\odot v) = (c\cdot c')\odot v$
8) $1\odot v = v$

π.χ. 1) $V=\mathbb{R}$ με τις κανονικές πράξεις. Είναι το V διαν. χώρος; Πρέπει να ικανοποιούν τις ιδιότητες. Ισχύει.
2) $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με πράξεις κατά συντεταγμένες $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\cancel{(x+y}\ (x,y)\oplus(x',y') = (x+x', y+y')$
$c\odot(x,y) = (c\cdot x, c\cdot y)$

Με αυτές τις πράξεις ισχύουν οι ιδιότητες
1) $((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3) = (x_1+x_2, y_1+y_2)\oplus(x_3,y_3)$
$= ((x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3) = (x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3)) =$
$= (x_1,y_1)\oplus(x_2+x_3, y_2+y_3) = (x_1,y_1)\oplus((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3))$
2) $e=(0,0)$
3) (x,y) αντίθετος $(-x,-y)$
4) $c\odot((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)) = c\odot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (c(x_1+x_2), c(y_1+y_2))$
$= c\odot(x_1,y_1)\oplus c\odot(x_2,y_2)$ κ.τ.λ.

Scanned by CamScanner

π.χ. 3) $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με πράξεις $(x,y)\oplus(x',y')=(xx',yy')$

$c\odot(x,y)=(cx,cy)$

Να εξετ. αν είναι δ.χ.

1) Ισχύει

2) $e=(1,1)$

3) $(x,y) \Rightarrow \exists (x',y'): (x,y)\oplus(x',y')=(1,1) \quad (xx',yy')=(1,1)$

Δεν ισχύει για όλα τα (x,y)

$(0,1) \not\Rightarrow$ Δεν είναι δ.χ.

Προσοχή! Για να δ.ο. ένα σύνολο $(V,\oplus\odot)$ είναι δ.χ. πρέπει να εξετ. όλες τις ιδιότητες. Για ν.δ.ο δεν είναι δ.χ. αρκεί να βρούμε μια ιδιότητα για την οποία **δεν ισχύει**

π.χ. 4) $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$

$c\odot(x,y)=(x,y)$

1), 2), 3), 4) ισχύει

6) $2\odot(x,y)=2(x,y)$

$(1+1)\odot(x,y)=1\odot(x,y)\oplus1\odot(x,y)=(x,y)\oplus(x,y)=(2x,2y)$

Δεν είναι.

π.χ. $\mathbb{R}^n$ με πράξεις κατά συντεταγμένες $(x_1,\dots,x_n)\oplus(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$c\odot(x_1,\dots,x_n)=(c\cdot x_1,\dots,c x_n)$

<u>Ορισμός</u> Με P_n συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού μέχρι και n

$P_n=\{a_nx^n+\dots+a_1x+a_0 \quad a_i\in\mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

$(a_nx^n+\dots+a_0)\oplus(b_nx^n+\dots+b_1x+b_0)=(a_n+b_n)x^n+\dots+(a_0+b_0)$

$c\odot(a_nx^n+\dots+a_0)=ca_nx^n+\dots+c\cdot a_0$

Scanned by CamScanner

$P_2 = \{ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$\left.\begin{matrix} x^2 \\ -1 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}_2$

$x^3 \notin \mathbb{R}_2$

$x^2 \oplus (-1)$

$(x^2 + 0_x + 0) \oplus (0x^2 + 0x + (-1)) = (0+1)\, x^2 + (0+0)\, x + (0 + (-1))$

π.χ. V το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πράξεις

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$

$(c \odot f)(x) = c \cdot f(x)$

Είναι δ.χ.

π.χ. V το σύνολο των μη-συνεχών συναρτήσεων.

Δεν είναι π.χ. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

και $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$ $f+g$ συνεχής

π.χ. $M(n \times m, \mathbb{R})$ με πράξη πρόσθεσης πίνακα και γινόμενο με αριθμό ΝΑΙ

$M(2 \times 3, \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$

$(a, b, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) \in \mathbb{R}^{2 \cdot 3}$

$M(n \times m, \mathbb{R}) \overset{1-1,\ \text{επί}}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}^{n \cdot m}$

η οποία σέβεται τις πράξεις

Scanned by CamScanner

Θεώρημα Έστω $(V, \oplus \odot)$ δ.χ.

Ισχύουν οι επόμενες

1) Το e ουδέτερο στοιχείο είναι μοναδικό

2) Το αντίθετο στοιχ. V είναι μοναδικό

3) Αν $u+v = v+w \Rightarrow v = w$

4) Η εξίσωση $x+v=w$ έχει μοναδική λύση την $x = w+(-v)$

5) $-(-u) = u$

6) $0 \cdot u = e$ μοναδικό

7) $-(c \odot u) = ((-c) \odot (u)) = c \odot (-u)$

Παρατήρηση

$P_0 = \{c$ σταθερό πολυώνυμο $| c \in \mathbb{R}\}$

$P_1 = \{ \alpha x + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \dots \subseteq P_\infty$

$P_\infty = \{$όλα τα πολυώνυμα$\}$

Scanned by CamScanner